$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proof: $\subseteq$ Let $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ and $x \in B \cup C$

$x \in B \cup C \Rightarrow x \in B$ or $x \in C$

Case 1: $x \in A$ and $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

Case 2: $x \in A$ and $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap C$

$x \in A \cap B$ or $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\supseteq$: Let $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

We want to show $y \in A \cap (B \cup C)$.

$y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow y \in (A \cap B)$ or $y \in A \cap C$

Case 1: $y \in A \cap B \Rightarrow y \in A$ and $y \in B$

$y \in B$ & $B \subseteq B \cup C \Rightarrow y \in B \cup C$; $y \in A$ and $y \in B \cup C$

$y \in A$ and $y \in B \cup C \Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$.

Case 2: $y \in A \cap C \Rightarrow y \in A$ and $y \in C$

$y \in C$ & $C \subseteq B \cup C \Rightarrow y \in B \cup C$

$y \in A$ and $y \in B \cup C \Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$.

Given 2 sets A & B,
To prove $A = B$

$A \subseteq B$

Let $x \in A$ . . .

. . $\Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$

Let $x \in B$ . . .

. . $\Rightarrow x \in A$

Recall:

$x \in A - B$
$\Rightarrow x \in A$ and $x \notin B$

If $x \in A \Rightarrow x \in B$, then
$A \subset B$

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$\subseteq$: Let $x \in A-(B\cup C)$.

$x \in A$ and $x \notin B \cup C$.

$x \notin B\cup C \Rightarrow x \notin B$ and $x \notin C$.

$x \in A$ and $x \notin B \Rightarrow x \in A-B$

$x \in A$ and $x \notin C \Rightarrow x \in A-C$

$x \in A-B$ and $x \in A-C$

$\Rightarrow x \in (A-B)\cap(A-C)$.

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$\supseteq$: let $y \in (A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow y \in (A-B)$ and $y \in (A-C)$

$y \in (A-B) \Rightarrow y \in A$ and $y \notin B$

$y \in (A-C) \Rightarrow y \in A$ and $y \notin C$

$y \notin B$ and $y \notin C \Rightarrow y \notin (B\cup C)$

$y \in A$ and $y \notin (B\cup C) \Rightarrow y \in A-(B\cup C)$